数学の研究を始めよう (V)

オイラーをモデルに数論研究

第4章 高次オイラー関数(高校生の発見した公式)

飯高 茂

平成 30 年 3 月 5 日

1 始まりは

私は 2013 年 3 月で学習院大学を定年退職し 4 月から都内の私立高校の数学クラブの助言者になった. そこで高校生に対して

与えられた n に対して ($a < n$ かつ a と n は互いに素な) a の平方 a^2 の和はどんな式になるか考えてみよう,

という問題を出した.

これは手強い問題でなかなかできないだろう. 私も平方和の公式を知らないので高校生に助言しながらうまい公式を見つけることができたらいいな.

程度に思っていた.

高校生は忙しい, 私も退職後それなりに忙しい. したがって助言をさほどすることもできなかった.

11 月ごろ問題を出して, 冬休みが終わった頃広尾学園の高校生三谷樹さんが平方和の公式ができました. という報告があった.

私はとても感心した. 公式は複雑だったが n の根基を使うと式が簡単にかける事を助言した.

abc 予想の定式化で登場した n の根基がここにも出てきたので多くの注目を集めた.

2 準備

自然数 n を素因数分解して

$$n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_s^{e_s}$$

とおく. 集合 $\Sigma_n = \{1, 2, \cdots, n\}$ について n の素因子 p に対して p の倍数になる Σ_n の元の集合を $\Sigma_n(p)$ で表す. $\Sigma_n(p) = p\Sigma_{\frac{n}{p}}$ と書くことができる. たとえば

$n = 6, p = 2$ のとき $\Sigma_3 = \{1, 2, 3\}, \Sigma_6(2) = 2 * \Sigma_3 = 2\{1, 2, 3\} = \{2, 4.6\}$.

$n = 6, p = 3$ のとき $\Sigma_2 = \{1, 2\}, \Sigma_6(3) = 3 * \Sigma_2 = 3\{1, 2\} = \{3, 6\}$.

2.1 オイラー関数

$W_n = \Sigma_n - \cup_{j=1}^{s}\Sigma_n(p_j)$ は $a < n$ かつ a と n が 互いに素な a の集合である.
その個数を $\varphi(n)$ と書く. これがオイラー関数であることは繰り返すまでもない.
Σ_n の部分集合 T についてその元の個数を $|T|$ で示すと
$|\Sigma_n(p_j)| = \dfrac{n}{p_j}, |\Sigma_n(p_j p_k)| = \dfrac{n}{p_j p_k}, \cdots$ が成り立つ.

2.2 包含関係の公式

一般に集合 S の部分集合 $A_1, A_2, \cdots, A_s$ について

$$|\cup_{j=1}^{s} A_j| = \sum_{j=1}^{s} |A_j| - \sum_{j<k}^{s} |A_j \cap A_k| + \cdots$$

証明は s についての数学的帰納法で容易にできる. (高校生はこの公式を自分で作っていた.)

2.3 オイラー関数の表示式

$$\begin{aligned}
\varphi(n) &= |W_n| \\
&= |\Sigma_n - \cup_{j=1}^{s}\Sigma_n(p_j)| \\
&= |\Sigma_n| - |\cup_{j=1}^{s}\Sigma_n(p_j)| \\
&= n - \sum_{j=1}^{s} |\Sigma_n(p_j)| + \sum_{j<k}^{s} |\Sigma_n(p_j p_k)| - \cdots \\
&= n - (n/p_1 + n/p_2 + \cdots + n/p_s) + n/(p_1 p_2) + \cdots + n/(p_{s-1} p_s) - \cdots \\
&= n(1 - 1/p_1)(1 - 1/p_2)\cdots(1 - 1/p_s)
\end{aligned}$$

と書ける.
そこで $A = (1 - 1/p_1)(1 - 1/p_2)\cdots(1 - 1/p_s)$ とおくと

$$\varphi(n) = nA.$$

一般に $N - 1$ を $\overline{N}$ で表すという記法をもちいてこれを書き直すとオイラー関数の表示式が得られる.

$$\varphi(n) = {p_1}^{e_1 - 1}\overline{p_1}{p_2}^{e_2 - 1}\overline{p_2}\cdots {p_s}^{e_s - 1}\overline{p_s}$$

オイラー関数 $\varphi(a)$ の性質 ($a > 1$) を復習しよう.

$\langle 1 \rangle$ $a - 1 \geq \varphi(a)$,

$\langle 2 \rangle$ a が素数なら $\varphi(a) = a - 1$. さらに $\varphi(a) = a - 1$ なら a は素数 ,

$\langle 3 \rangle$ a が素数でないなら $a \geq \varphi(a) + \sqrt{a}$,

$\langle 4 \rangle$ a, b が互いに素なら $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$ (乗法性).

3　高次オイラー関数の始まり

3.1　和の場合

$a < n$ かつ n と互いに素な a の和を $\psi(n)$ と書く．一般に Σ_n の部分集合 T についてその元の和を $|T|_1$ で示すと

$$|\Sigma_n|_1 = \frac{n(n+1)}{2}, |\Sigma_n(p)|_1 = p\frac{n/p(n/p+1)}{2} = \frac{n^2}{2p} + \frac{n}{2} = \frac{n}{2}(\frac{n}{p}+1).$$

$0 = (1-1)^s = 1 - s + s(s-1)/2 - s(s-1)(s-2)/6 + \cdots$ に注意すると

$$\begin{aligned}
\psi(n) &= |\Sigma_n - \cup_{j=1}^s \Sigma_n(p_j)|_1 \\
&= |\Sigma_n|_1 - |\cup_{j=1}^s \Sigma_n(p_j)|_1 \\
&= \frac{n(n+1)}{2} - \sum_{j=1}^s |\Sigma_n(p_j)|_1 + \sum_{j<k}^s |\Sigma_n(p_j p_k)|_1 - \cdots \\
&= \frac{n}{2}(n + 1 - n\sum_{j=1}^s \frac{1}{p_j} - s + n\sum_{j,k} \frac{1}{p_j p_j} + \frac{s(s-1)}{2} - \cdots) \\
&= \frac{n}{2}(nA) = \frac{n\varphi(n)}{2}.
\end{aligned}$$

よって $\psi(n) = \dfrac{n\varphi(n)}{2}$.

これは Wikipedia の英語版に出ている公式である．実は最初にこの問題を出したら高校生が自力で解いたのでそれでは, 平方和をしてごらんと言った.

3.2　平方和

平方和について考える．$a < n$ かつ n と互いに素な a の平方和を $\psi^{(2)}(n)$ と書く．
一般に部分集合 T についてその元の平方和を $|T|_2$ で示すと

$$|\Sigma_n|_2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n}{6}(3n + 2n^2 + 1),$$

$$|\Sigma_n(p_j)|_2 = \frac{n}{6}(3n + \frac{2n^2}{p_j} + p_j)$$

$$
\begin{aligned}
\psi^{(2)}(n) &= |\Sigma_n - \cup_{j=1}^{s}\Sigma_n(p_j)|_2 \\
&= |\Sigma_n|_2 - |\cup_{j=1}^{s}\Sigma_n(p_j)|_2 \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \sum_{j=1}^{s}|\Sigma_n(p_j)|_2 + \sum_{j<k}^{s}|\Sigma_n(p_jp_k)|_2 + \cdots \\
&= \frac{n}{6}(3n + 2n^2 + 1 - (3ns + 2n^2\sum_{j=1}^{s}\frac{1}{p_j} + \sum_{j=1}^{s}p_j) \\
&+ (3n\frac{s(s-1)}{2} + 2n^2\sum_{j,k}\frac{1}{p_jp_k} + \sum_{j,k}p_jp_k)\cdots) \\
&= \frac{n}{6}(2n^2 + 1 - (2n^2\sum_{j=1}^{s}\frac{1}{p_j} + \sum_{j=1}^{s}p_j) + (2n^2\sum_{j,k}\frac{1}{p_jp_k} + \sum_{j,k}p_jp_k)\cdots \\
&= \frac{n}{6}(2n^2A + B).
\end{aligned}
$$

ここで $B = (1-p_1)(1-p_2)\cdots(1-p_s)$ とおいた. よって

$$\psi^{(2)}(n) = \frac{n}{6}(2n^2A + B).$$

3.3 平方和の公式

n の根基 $\mathrm{rad}(n) = p_1p_2\cdots p_s$ を用いると,

$$\frac{B}{\mathrm{rad}(n)} = (1/p_1 - 1)(1/p_2 - 1)\cdots(1/p_s - 1) = (-1)^sA.$$

$$nB = \mathrm{rad}(n)(-1)^snA = \mathrm{rad}(n)(-1)^s\varphi(n).$$

$$\psi^{(2)}(n) = \frac{1}{6}(2n^2\varphi(n) + nB) = \frac{\varphi(n)}{6}(2n^2 + (-1)^s\mathrm{rad}(n)).$$

こうして次の式ができた.

$$\psi^{(2)}(n) = \frac{\varphi(n)}{6}(2n^2 + (-1)^s\mathrm{rad}(n))$$

3.4　立方和

三谷さんは立方和についても公式を与えた．

$a<n$ かつ n と互いに素な a の立方和を $\psi^{(3)}(n)$ と書く．T についてその元の立方和を $|T|_3$ で示すと

$|\Sigma_n|_3=\dfrac{n^2(n^2+2n+1)}{4}$ が成り立ち $|\Sigma_n(p_j)|_3=\dfrac{n^2}{4}(2n+\dfrac{n^2}{p_j}+p_j)$.

$$\begin{aligned}\psi^{(3)}(n)&=|\Sigma_n-\cup_{j=1}^s\Sigma_n(p_j)|_3\\&=|\Sigma_n|_3-|\cup_{j=1}^s\Sigma_n(p_j)|_3\\&=\frac{n^2}{4}(n^2+2n+1-\sum_{j=1}^s(\frac{n^2}{p_j}+2n+p_j)-\sum_{j,L}^s(\frac{n^2}{p_jp_L}+2n+p_jp_L))\cdots\\&=\frac{n^2}{4}(n^2A+B).\\&=\frac{n\varphi(n)}{4}(n^2+(-1)^s\mathrm{rad}(n)).\end{aligned}$$

よって

$$\psi^{(3)}(n)=\frac{n\varphi(n)}{4}(n^2+(-1)^s\mathrm{rad}(n)).$$

3.5　4 乗和

次に 4 乗和を考える．$a<n$ かつ n と互いに素な a の 4 乗和を $\psi^{(4)}(n)$ と書く．一般に部分集合 T についてその元の 4 乗和を $|T|_4$ で示すと

$$|\Sigma_n|_4=\frac{n}{30}(15n^3+6n^4+10n^2-1),|\Sigma_n(p_j)|_4=\frac{n}{30}(15n^3+\frac{6n^4}{p_j}+10n^2p_j-p_j^3)$$

さらに $\Gamma_3(n)=(1-p_1^3)(1-p_2^3)\cdots(1-p_s^3)$ を用いると

$$\begin{aligned}\psi^{(4)}(n)&=|\Sigma_n-\cup_{j=1}^s\Sigma_n(p_j)|_4\\&=|\Sigma_n|_4-|\cup_{j=1}^s\Sigma_n(p_j)|_4\\&=\frac{n}{30}(6n^4A+10n^2B-\Gamma_3(n))\\&=\frac{n}{30}(6n^3\varphi(n)+10n(-1)^s\mathrm{rad}(n)\varphi(n)-\Gamma_3(n)).\end{aligned}$$

かくて次の結果に至る．

$$\psi^{(4)}(n) = \frac{n}{30}(6n^3\varphi(n) + 10n(-1)^s\mathrm{rad}(n)\varphi(n) - \Gamma_3(n))$$

次に 5 乗和を考えこうして次の結果を得た.

$$\psi^{(5)}(n) = \frac{n^2}{12}(2n^3\varphi(n) + 5n(-1)^s\mathrm{rad}(n)\varphi(n) - \Gamma_3(n))$$

$n = 3$ として検算しよう.

$\psi^{(5)}(3) = 1 + 2^5 = 33.$

一方 $2n^3\varphi(n) + 5n(-1)^s\mathrm{rad}(n)\varphi(n) - \Gamma_3(n) = 2 * 3^3 * 2 - 15 * 3 * 2 + 26 = 108 + 26 - 90 = 44.$ そして,$44 * 9/12 = 33.$

3.6 m 乗和 の公式

このようにしてやり方がわかると順調に次数をあげていくらでも調べることができる. それでは, 一般に m 乗和はどうなるか. ここではベルヌーイ数が登場する.

Σ_n の部分集合 T についてその元の m 乗和を $|T|_m$ で示す.

$$S_m(n) = |\Sigma_n|_m = \sum_{k=1}^{n} k^m = 1 + 2^m + \cdots + n^m$$

とおく. $S_m(n)$ の式はベルヌーイ数 B_k を用いると表すことができる.

4 ベルヌーイ数 B_k

一般に数列 $\{c_n\}$ について $f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j x^j$ を母関数,$h(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{c_j}{j!} x^j$ を指数型母関数という.

$\frac{t}{e^t - 1}$ を指数型母関数とするときの展開係数としてベルヌーイ数 B_k が定義される. すなわち

$$\frac{t}{e^t - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} B_k \frac{t^k}{k!}.$$

以後も指数型母関数がいろいろ使われる.

ベルヌーイ数 B_k を一般に明示的に与えることは困難だが簡単な場合は次のようになる.

$$B_0 = 1, B_1 = -\frac{1}{2}, B_2 = \frac{1}{6}, B_3 = 0, B_4 = -\frac{1}{30}, B_5 = 0, B_6 = \frac{1}{42}, B_7 = 0.$$

($B_1 = \frac{1}{2}$ とする場合もあり, この場合 m 乗和 の公式は微妙に違う)

$k > 1$, 奇数なら $B_k = 0$.

$$B_8 = \frac{-1}{30}, B_{10} = \frac{5}{66}, B_{12} = -\frac{691}{2730}, B_{14} = \frac{7}{6},$$

$$B_{16}=-\frac{3617}{510}, B_{18}=\frac{43867}{798}, B_{20}=-\frac{174611}{330}.$$

偶数項の分子の性質がとりわけ興味深い. B_{12} の分子 691 は素数. 分子に素数の多いことは注目に値する.

4.1 B_k の諸性質

$\zeta(s)$ をリーマンゼータ関数とする.

1. 漸化式

$$B_k=-\sum_{q=0}^{k-1}\binom{k}{q}\frac{B_q}{(k-q+1)}.$$

$$\frac{te^{xt}}{e^t-1}=\sum_{k=0}^{\infty}B_k(x)\frac{t^k}{k!}.$$

3.

$$\zeta(2n)=(-1)^{n+1}B_{2n}\frac{(2\pi)^{2n}}{2\times(2n)!}.$$

これより $\zeta(2)=\dfrac{\pi^2}{6}, \zeta(4)=\dfrac{\pi^4}{90}$(Euler) など

4.

$$\zeta(-n)=\frac{-B_{n+1}}{n+1}, n>0$$

$n=2k$ なら $B_{n+1}=0$. よって $\zeta(-2k)=0:-2k$ をゼータ関数の自明な零点という.

4.2 $B_{2k+1}=0$ の証明

$\dfrac{t}{e^t-1}=1-\dfrac{t}{2}+F(t)$ により　$F(t)$ を定義する.

$c_k=B_k/k!$ を使うと

$$F(t)=\sum_{k=2}^{\infty}c_kt^k.$$

これが偶関数になることを以下で確認する.

$$F(t)=\frac{t}{e^t-1}-1+\frac{t}{2}=\frac{2+t+(t-2)e^t}{2(e^t-1)}$$

により

$$F(-t)=\frac{2-t-(t+2)e^{-t}}{2(e^{-t}-1)}=\frac{(2-t)e^t-(t+2)}{2(1-e^t)}.$$

$X=e^t-1$ とおけば $X+1=e^t$ によって,

$$\frac{(2-t)e^t-(t+2)}{2(1-e^t)}=\frac{(2-t)(X+1)-(t+2)}{-2X}=\frac{t}{2}-1+\frac{t}{X}=F(t).$$

$F(-t)=F(t)$ になり $F(t)$ が偶関数になる.

よって $c_{2k+1}=0$. したがって,$0=c_{2k+1}=B_{2k+1}/(2k+1)!, B_{2k+1}=0$.

5 べき和 の公式

$a_{k,m}=(-1)^k\binom{m+1}{k}B_k$ を定める.

たとえば

$$a_{0,m}=1, a_{1,m}=\frac{m+1}{2}, a_{2,m}=\frac{m(m+1)}{12}, a_{3,m}=0, a_{4,m}=-\frac{(m+1)m(m-1)(m-2)}{24\times 30},$$

m 乗和 $S_m(n)=|\Sigma_n|_m=\sum_{k=1}^n k^m$ は n について $m+1$ 次式であり次の公式が成り立つ.

$$S_m(n)=\frac{n}{m+1}\sum_{k=0}^{m}a_{k,m}n^{m-k}.$$

はじめの数項は次のようになる.

$$S_m(n)=\frac{n}{m+1}(n^m+\frac{m+1}{2}n^{m-1}+\frac{m(m+1)}{12}n^{m-2}-\frac{(m+1)m(m-1)(m-2)}{24\times 30}n^{m-4}+\cdots$$

$m=3$ のとき検算

$$S_3(n)=\frac{n}{4}(n^3+2n^2+n)=\frac{n^2}{4}(n+1)^2.$$

5.1 べき和公式の証明

以下英語版 Wikipedia を参考に証明を与える.

$\{B_j\}$ について その指数型母関数は簡単になる.

$$\frac{z}{e^z-1}=\sum_{j=0}^{\infty}B_j\frac{z^j}{j!}$$

これより

$$\frac{1}{e^z-1}=\sum_{j=0}^{\infty}B_j\frac{z^{j-1}}{j!}$$

m 乗和 $S_m(n)$ について その指数型母関数を $G(z,n)$ とおくとき

$$G(z,n)=\sum_{m=0}^{\infty}S_m(n)\frac{z^m}{m!}=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}k^m\frac{z^m}{m!}$$

和の順序を入れ替えて

$$G(z,n)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(kz)^m}{m!}=\sum_{k=1}^{n}e^{kz}.$$

$W=e^z$ とおくと

$$\sum_{k=1}^{n}e^{kz}=\sum_{k=1}^{n}W^k=\sum_{k=0}^{n}W^k-1=\frac{W^{n+1}-1}{W-1}-1=W\times\frac{W^n-1}{W-1}$$

これより

$$G(z,n)=W\times\frac{W^n-1}{W-1}=\frac{e^{nz}-1}{1-e^{-z}}=(e^{nz}-1)\times\frac{1}{1-e^{-z}}.$$

$e^{nz}-1=\sum_{q=1}^{\infty}\dfrac{1}{q!}(nz)^q$ と $\dfrac{1}{1-e^{-z}}=-\sum_{j=0}^{\infty}B_j\dfrac{(-z)^{j-1}}{j!}$ 　とを代入すると

$$\begin{aligned}G(z,n)&=-\sum_{j=0}^{\infty}B_j\frac{(-z)^{j-1}}{j!}\sum_{q=1}^{\infty}\frac{1}{q!}(nz)^q\\&=\sum_{j=0}^{\infty}B_j(-1)^j\sum_{q=1}^{\infty}\frac{z^{q+j-1}n^q}{j!q!}.\end{aligned}$$

ここで $m=q+j-1$ とおくとき $j=m+1-q\leq m$ により $m\geq j$.
q を m で置き換えて式を整理する:

$$\frac{B_j(-1)^jz^{q+j-1}n^q}{j!q!}=\frac{B_j(-1)^jz^mn^{m+1-j}}{j!(m+1-j)!}$$

$\binom{m+1}{j}=\dfrac{m!(m+1)}{(m+1-j)!j!}$ に注意すると

$$\frac{B_j(-1)^jz^mn^{m+1-j}}{j!(m+1-j)!}=B_j(-1)^jz^mn^{m+1-j}\binom{m+1}{j}\frac{1}{m!(m+1)}.$$

これを用いて $G(z,n)$ を求める.

$$\begin{aligned}G(z,n)&=\sum_{m=1}^{\infty}(\sum_{j=0}^{m}B_j(-1)^jn^{m+1-j}\binom{m+1}{j})\frac{z^m}{m!(m+1)}\\&=\sum_{m=1}^{\infty}(\frac{n}{m+1}\sum_{j=0}^{m}B_j(-1)^jn^{m-j}\binom{m+1}{j})\frac{z^m}{m!}\\&=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{n}{m+1}\sum_{j=0}^{m}a_{j,m}n^{m-j}\frac{z^m}{m!}\end{aligned}$$

よって $G(z,n)=\sum_{m=0}^{\infty}S_m(n)\dfrac{z^m}{m!}$ により

$$S_m(n)=\frac{n}{m+1}\sum_{j=0}^{m}a_{j,m}n^{m-j}.$$

6 $\psi^{(m)}(n)$ の公式

n の素因子 $p=p_j$ について

$$|p\Sigma_n(\frac{n}{p})|_m=p^m\frac{n/p}{m+1}\sum_{k=0}^{m}a_{k,m}(n/p)^{m-k}=\frac{n}{m+1}\sum_{k=0}^{m}a_{k,m}n^{m-k}p^{k-1}$$

に注意すると,

$$|pS(\frac{n}{p})|_m=\frac{n}{m+1}\sum_{k=0}^{m}a_{k,m}n^{m-k}p^{k-1}$$

これを展開すると $a_{3,m}=0$ によって

$$\frac{n}{m+1}(\frac{n^m}{p}+a_{1,m}n^{m-1}+pa_{2,m}n^{m-2}+p^3a_{4,m}n^{m-4})+\cdots$$

n の素因子 $p=p_j,q=p_L$ について

$$|pq\Sigma_n(\frac{n}{pq})|_m=\frac{n}{m+1}\sum_{k=0}^{m}a_{k,m}n^{m-k}p^{k-1}q^{k-1}$$

$n=p_1^{e_1}p_2^{e_2}\cdots p_s^{e_s}$ について $\Gamma(r,n)=\prod_{j=1}^{s}(1-p_j^r)$ とおく.

強いて言えば, $\Gamma(-1,n)=\prod_{j=1}^{s}(1-1/p_j)=A$,$\Gamma(1,n)=B$.

$a<n$ かつ n と互いに素な a の m 乗和を $\psi^{(m)}(n)$ と書く. これを総称して高次オイラー関数という.

$$\begin{aligned}
\psi^{(m)}(n)&=|\Sigma_n-\cup_{j=1}^{s}\Sigma_n(p_j)|_m\\
&=|\Sigma_n|_m-|\cup_{j=1}^{s}\Sigma_n(p_j)|_m\\
&=S_m(n)-\sum_{j=1}^{s}|\Sigma_n(p_j)|_m+\sum_{j<L}^{s}|\Sigma_n(p_jp_L)|_m+\cdots\\
&=\frac{n}{m+1}(\sum_{k=0}^{m}a_{k,m}n^{m-k}-\sum_{j=1}^{s}(\sum_{k=0}^{m}a_{k,m}n^{m-k}p_j^{k-1})-\sum_{j<L}^{s}\sum_{k=0}^{m}a_{k,m}n^{m-k}p_j^{k-1}p_L^{k-1}+\cdots\\
&=\frac{n}{m+1}(An^m+a_{2,m}Bn^{m-2}+a_{4,m}\Gamma(3,n)n^{m-4}+a_{6,m}\Gamma(5,n)n^{m-6}+\cdots)
\end{aligned}$$

よって

$$\psi^{(m)}(n)=\frac{n}{m+1}(An^m+a_{2,m}Bn^{m-2}+a_{4,m}\Gamma(3,n)n^{m-4}+a_{6,m}\Gamma(5,n)n^{m-6}+\cdots).$$

これが高次オイラー関数の公式になる.

$m=5$ として検算

$a_{2,m}=\dfrac{m(m+1)}{12}=\dfrac{5}{2}, a_{4,m}=-\dfrac{m(m+1)(m-1)(m-2)}{30}=-\dfrac{1}{2}$ により

$$\psi^{(5)}(n)=\frac{n^2}{12}(2\varphi(n)n^3+5Bn^2-\Gamma(3,n)).$$

$$\psi^{(5)}(n)=\frac{n^2}{12}(2\varphi(n)n^3+(-1)^s5\varphi(n)\mathrm{rad}(n)n-\Gamma(3,n)).$$

2,3,4 乗和の場合の公式ができたとわかれば, どこかの数学者が m 乗和の場合の公式を作るだろう.

私は自らの責任で一般の場合の公式を作ることを試みた. その結果できた公式はサイズの大きいものであり高校生の作った簡明で美しい公式には遠く及ばないものとなった.